UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

GENERADORES DE CONOCIMIENTO

GECOUSB

gecousb@gmail.com

FÍSICA II

GUÍA TEÓRICA

Antony Rangel

Ingeniería de Materiales

16-10962@usb.ve

Caracas, junio de 2020

Prólogo

GUÍA EN DESARROLLO

Nota: Esta guía fue digitalizada por Antony Rangel para GECOUSB.

Primera Edición: Miércoles 10 de Junio de 2020

Antony Rangel

16-10962

Ingeniera de Materiales

Twitter: @antonyrangel10

Instagram: antonyrangel10

Gecousb.com.ve

Twitter: @gecousb

Instagram: gecousb

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o incongruencia y que deberá notificar a la dirección de gecousb@gmail.com

ÍNDICE

Sistema de Partículas

Es cualquier conjunto bien definido de partículas del universo sobre el cual enfocaremos nuestra atención. Este puede ser:

- Un objeto o partícula.
- Una agrupación de objetos o partículas.

Cantidad de Movimiento

El concepto de "cantidad de movimiento" o "Momento línea" fue introducido por Newton. Esta es una propiedad que se confiere a toda partícula y que permite cuantificar la "inercia" de está. Tomemos un sistema aislado conformado por dos partículas que interactúan mutuamente:

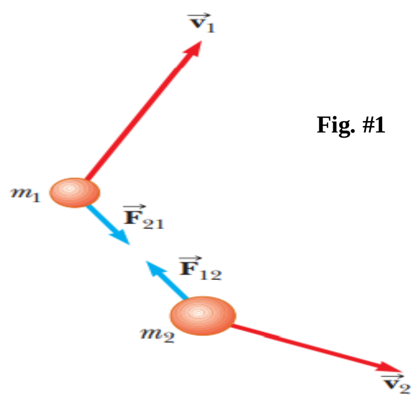


Fig. #1

Recordemos que es aislado porque las dos partículas que conforman el sistema no interactúan con la existencia de otros cuerpos que se encuentran fuera de los límites que se han destinado para definir el sistema físico.

Las Fuerzas $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{21}$ forman un par acción-reacción cumpliendo con la "3^{er} Ley de Newton" por lo cual podemos expresar como:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = \vec{0}$$

Mediante el uso de la "2^{da} Ley de Newton" la cual define: $\vec{F} = m\vec{a}$ incorporamos esta ley en la expresión anterior, se obtiene:

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = \vec{0}$$

Se sabe por definición que la derivada de la velocidad respecto del tiempo es la aceleración, es decir: $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$ reemplazando en la ecuación anterior:

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{d(m_1\vec{v}_1)}{dt} + \frac{d(m_2\vec{v}_2)}{dt} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = \vec{0}$$

Se puede apreciar que la derivada respecto al tiempo de la suma $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ es cero. Por consecuencia, esta debe ser constante. Esto da a entender que la cantidad $m\vec{v}$ es importante para la partícula pues no cambia con el tiempo.

Por lo tanto la "Cantidad de Movimiento lineal" de una partícula se define como el producto de la masa y la velocidad de la partícula:

$$\vec{P} = m\vec{v} \quad (1)$$ **Cantidad Vectorial**

¿Cuándo se conserva el Momento lineal del sistema?

Consideremos el siguiente sistema aislado:

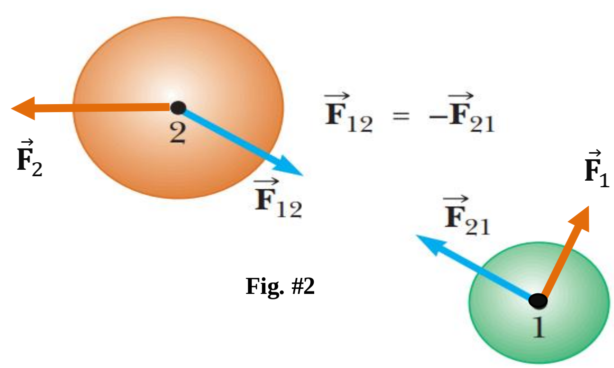


Fig. #2

Las Fuerzas $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{21}$ forman un par acción-reacción y las Fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ no forman un par acción-reacción, por lo tanto podemos clasificar las fuerzas como:

- **Fuerzas Internas:** Son aquellas fuerzas que **si** presentan un par acción-reacción en el sistema, es decir, al sumar todas las fuerzas éstas se "anulan" en pares.
- **Fuerzas Externas:** Son aquellas fuerzas que **no** presentan un par acción-reacción en el sistema, es decir, al sumar todas las fuerzas éstas "no se anulan" en pares.

Luego, el "Momento lineal" del sistema viene dado por la suma de cada uno de los momentos generados por cada partícula, es decir:

$$\vec{P}_{Sistema} = \sum \vec{P}_i = \sum m_i \vec{v}_i \quad (2)$$

Ahora:

$$\vec{P}_{Sistema} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

Derivando el "Momento lineal" respecto al tiempo **t**.

$$\Rightarrow \frac{d\vec{P}_{Sistema}}{dt} = \frac{d\vec{P}_1}{dt} + \frac{d\vec{P}_2}{dt} = \frac{d(m_1\vec{v}_1)}{dt} + \frac{d(m_2\vec{v}_2)}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{P}_{Sistema}}{dt} = \frac{d\vec{P}_1}{dt} + \frac{d\vec{P}_2}{dt} = m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt}$$

Sustituyendo: $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$ en la expresión

$$\Rightarrow \frac{d\vec{P}_{Sistema}}{dt} = \frac{d\vec{P}_1}{dt} + \frac{d\vec{P}_2}{dt} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2$$

Podemos relacionar la expresión con la "2^{da} Ley de Newton": $\vec{F} = \mathbf{m}\vec{a}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{P}_{Sistema}}{dt} = \frac{d\vec{P}_1}{dt} + \frac{d\vec{P}_2}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_2 + \vec{F}_{21}$$

Como: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ por ser un par acción-reacción.

$$\Rightarrow \frac{d\vec{P}_{Sistema}}{dt} = \frac{d\vec{P}_1}{dt} + \frac{d\vec{P}_2}{dt} = \vec{F}_1 - \cancel{\vec{F}_{21}} + \vec{F}_2 + \cancel{\vec{F}_{21}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{P}_{Sistema}}{dt} = \frac{d\vec{P}_1}{dt} + \frac{d\vec{P}_2}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{P}_{Sistema}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \sum \vec{F}_{Externas}$$

Por lo que obtenemos la siguiente relación:

$$\frac{d\vec{P}_{Sistema}}{dt} = \sum \vec{F}_{Externas} \quad (3)$$

Entonces para que el Momento lineal del Sistema se conserve, este deber ser constante y para que pueda ser constante su derivada respecto a **t** debe ser cero, es decir:

$$\vec{P}_{Sistema} = \mathbf{ctt} \Rightarrow \frac{d\vec{P}_{Sistema}}{dt} = \sum \vec{F}_{Externas} = \vec{0}$$

Finalmente, $\vec{P}_{Sistema}$ se conserva cuando $\sum \vec{F}_{Externas} = \vec{0}$

Impulso y Momento Lineal

El impulso está asociado a una fuerza, una medida de cuanta fuerza en promedio se está aplicando a un cuerpo u objeto.

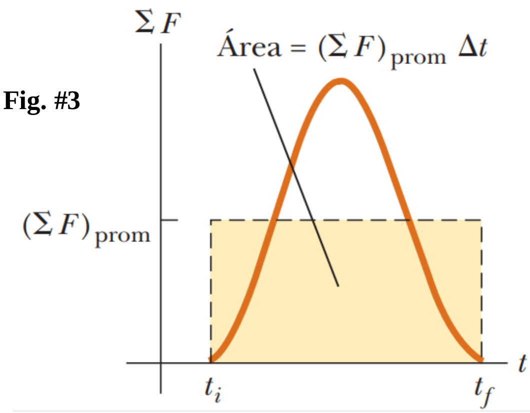
El impulso transferido por la acción de una fuerza se obtiene mediante la integración de ésta respecto al tiempo, en un intervalo de tiempo $\Delta T = t_f - t_o$ esto es:

$$\vec{I} = \int_{t_o}^{t_f} \vec{F}(t)dt = \langle \vec{F}(t) \rangle . \Delta T \quad (4)$$

Donde: $\langle \vec{F}(t) \rangle$ es el promedio de la fuerza.

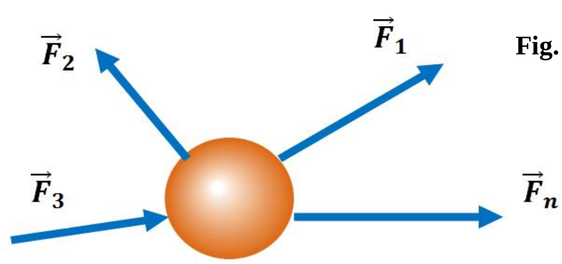
A partir de esta definición, se ve que el impulso $\vec{I}$ es una cantidad vectorial que tiene una magnitud igual al área bajo la cuerva.

Fig. #3



Consideremos el siguiente conjunto de fuerzas que actúan sobre la siguiente partícula.

Fig. #4



El impulso neto o total del sistema transferido a una partícula es el resultado de sumar todos los impulsos individuales debido a la acción de cada una de las fuerzas que actúan sobre la partícula, esto es:

$$\vec{I}_{Sistema\ I} = \vec{I}_I(\vec{F}_1) + \vec{I}_I(\vec{F}_2) + \vec{I}_I(\vec{F}_3) + \cdots + \vec{I}_I(\vec{F}_n)$$

Por la expresión **(4)** se puede escribir como:

$$\Rightarrow \vec{I}_{Sistema\ I} = \int_{t_o}^{t_f} (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_n)dt$$

$$\Rightarrow \vec{I}_{Sistema\ I} = \int_{t_0}^{t_f} \sum \vec{F}_{Externas} \mathbf{dt}$$

Relacionamos esta expresión con la ecuación **(3)**, se obtiene que:

$$\Rightarrow \vec{I}_{Sistema\ I} = \int_{t_0}^{t_f} \sum \vec{F}_{Externas} dt = \int_{t_0}^{t_f} \frac{d\vec{P}_{Sistema}}{\cancel{dt}} \cancel{dt}$$

Notemos que al realizar esta operación debemos cambiar los límites de integración, por lo cual los nuevos límites de integración deben estar en función del nuevo diferencial.

$$\Rightarrow \vec{I}_{Sistema\ I} = \int d\vec{P}_{Sistema} = \int_{\vec{P}_0}^{\vec{P}_f} d\vec{P}_{Sistema}$$

Al integrar se obtiene:

$$\Rightarrow \vec{I}_{Sistema\ I} = \vec{P}_f - \vec{P}_0 = \Delta\vec{P}_{Sistema}$$

Por lo cual, el Impulso de la fuerza neta que actúa en la partícula es igual al cambio en la cantidad de movimiento de dicha partícula.

$$\vec{I} = \Delta\vec{P} \quad \textbf{(5)}$$

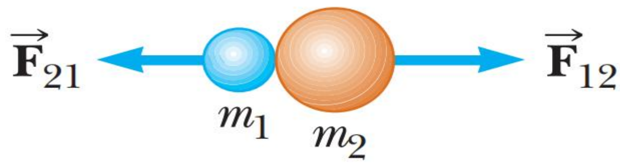
Se debe destacar que el impulso no es una propiedad que se le confiere a la partícula o al cuerpo sino es una propiedad debido a la interacción del entorno con la partícula o del cuerpo sobre el cual actúa la fuerza. Es decir, es una medida del grado en el que la fuerza externa cambia la cantidad de movimiento de la partícula.

Choques o Colisiones

Los Choques son el producto o consecuencia de las interacciones entre dos o más cuerpos mediante fuerzas muy intensas durante un intervalo de tiempo muy corto.

Consideremos el choque entre las siguientes dos partículas de masas $\boldsymbol{m_1}$ y $\boldsymbol{m_2}$ que se muestra a continuación:

Fig. #5



Durante el breve choque, las partículas ejercen grandes fuerzas una sobre la otra.

Donde al chocar experimentan fuerzas iguales y opuestas en direcciones de sus centros, de acuerdo "3er Ley de Newton".

Estas fuerzas $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{21}$ forman un par acción-reacción, en consecuencia, ambas partículas constituyen un sistema aislado por lo que no hay "Fuerzas Externas" que actúen y la cantidad de movimiento del sistema se conserva. Por lo tanto en los choques podemos aplicar con una buena aproximación, la conservación del "Momento Lineal".

En general, los choques se clasifican en dos tipos, según sea la pérdida de "Energía Cinética".

Choques Perfectamente Inelásticos

En este tipo de choque "No se conserva la Energía Cinética" y la Energía Cinética después del choque siempre es menor que la había antes.

Este es un choque en el que los cuerpos quedan pegados entre si y continúan moviéndose con una velocidad en común.

Consideremos dos cuerpos o partículas de masas $\boldsymbol{m_1}$ y $\boldsymbol{m_2}$ que se mueven inicialmente con velocidades $\vec{v}_{1_i}$ y $\vec{v}_{2_i}$ respectivamente, a lo largo de la misma recta.

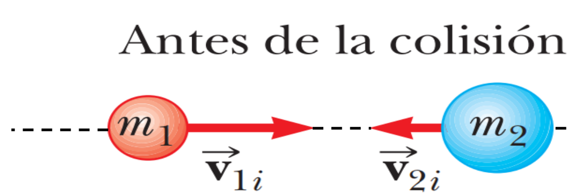


Fig. #6

Después las dos partículas chocan de frente, estas quedan unidas y moviéndose con una velocidad en común $\vec{v}_f$.

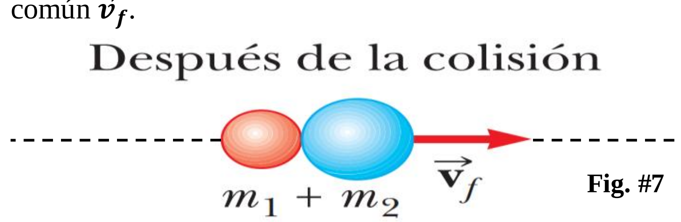


Fig. #7

Aplicando la conservación del Momento Lineal:

$$\Delta\vec{P} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{P}_f - \vec{P}_0 = \vec{0} \Longrightarrow \vec{P}_0 = \vec{P}_f$$

$$\Longrightarrow m_1\vec{v}_{1_i} + m_2\vec{v}_{2_i} = (m_1 + m_2)\vec{v}_f$$

Despejando la velocidad final en común $\vec{v}_f$, se obtiene:

$$\vec{v}_f = \frac{m_1\vec{v}_{1_i} + m_2\vec{v}_{2_i}}{m_1 + m_2} \quad \textbf{(6)}$$

Choques Elásticos

En este tipo de choques "Si se conserva la Energía Cinética", por lo que no hay perdida de Energía Cinética.

Este es un choque en el cual los cuerpos no quedan pegados y luego dejan el sitio de la colisión con diferentes velocidades.

Consideremos dos cuerpos o partículas de masas m_1 y m_2 que se mueven inicialmente con velocidades $\vec{v}_{1_i}$ y $\vec{v}_{2_i}$ respectivamente, a lo largo de la misma recta.

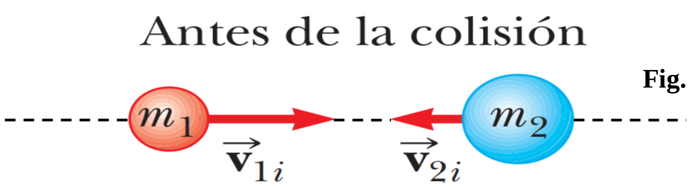


Fig. #8

Después las dos partículas chocan de frente y salen despedidas con velocidades diferentes $\vec{v}_{1_f}$ **y** $\vec{v}_{2_f}$ respectivamente.

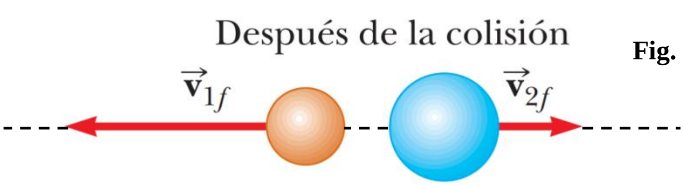


Fig. #9

Aplicando la conservación del Momento Lineal:

$$\Delta\vec{P} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{P}_f - \vec{P}_0 = \vec{0} \Longrightarrow \vec{P}_0 = \vec{P}_f$$

$$\Longrightarrow m_1\vec{v}_{1_i} + m_2\vec{v}_{2_i} = m_1\vec{v}_{1_f} + m_2\vec{v}_{2_f}$$

Como el movimiento ocurre en una misma dirección podemos escribir la ecuación con sus respectivas magnitudes:

$$m_1v_{1_i} + m_2v_{2_i} = m_1v_{1_f} + m_2v_{2_f} \quad \textbf{(7)}$$

Claramente la ecuación **(7)** pose dos incógnitas entonces se tienen más incógnitas que ecuaciones, pero por ser un choque elástico se conserva la Energía Cinética y podemos usar la siguiente relación:

$$\Delta K = 0 \Rightarrow K_f - K_i = 0 \Rightarrow K_i = K_f$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m_1v^2{}_{1_i} + \frac{1}{2}m_2v^2{}_{2_i} = \frac{1}{2}m_1v^2{}_{1_f} + \frac{1}{2}m_2v^2{}_{2_f} \quad \textbf{(8)}$$

Ahora teniendo dos ecuaciones **(7), (8)** y dos incógnitas v_{1_f} y v_{2_f} podemos resolver el problema propuesto.

Tomamos la ecuación **(7)** y la rescribimos de la siguiente forma:

$$m_1v_{1_i} + m_2v_{2_i} = m_1v_{1_f} + m_2v_{2_f}$$

$$\Rightarrow m_1v_{1_i} - m_1v_{1_f} = m_2v_{2_f} - m_2v_{2_i}$$

$$\Rightarrow m_1\left(v_{1_i} - v_{1_f}\right) = m_2\left(v_{2_f} - v_{2_i}\right) \,*$$

Tomamos la ecuación **(8)** y la rescribimos de la siguiente forma:

$$\frac{1}{2}m_1v^2{}_{1_i} + \frac{1}{2}m_2v^2{}_{2_i} = \frac{1}{2}m_1v^2{}_{1_f} + \frac{1}{2}m_2v^2{}_{2_f}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m_1v^2{}_{1_i} - \frac{1}{2}m_1v^2{}_{1_f} = \frac{1}{2}m_2v^2{}_{2_f} - \frac{1}{2}m_2v^2{}_{2_i}$$

Multiplicamos por 2 toda la ecuación

$$2\left(\frac{1}{2}m_1v^2{}_{1_i} - \frac{1}{2}m_1v^2{}_{1_f} = \frac{1}{2}m_2v^2{}_{2_f} - \frac{1}{2}m_2v^2{}_{2_i}\right)$$

$$\Rightarrow m_1v^2{}_{1_i} - m_1v^2{}_{1_f} = m_2v^2{}_{2_f} - m_2v^2{}_{2_i}$$

$$\Rightarrow m_1\,(v^2{}_{1_i} - v^2{}_{1_f}) = m_2(v^2{}_{2_f} - v^2{}_{2_i})$$

Se tiene una diferencia de cuadrados: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$$\Rightarrow m_1\left(v_{1_i} - v_{1_f}\right)\left(v_{1_i} + v_{1_f}\right) = m_2\left(v_{2_f} - v_{2_i}\right)\left(v_{2_f} + v_{2_i}\right) \,**$$

Ahora se divide la ecuación (**) entre (*):

$$\frac{m_1\left(v_{1_i} - v_{1_f}\right)\left(v_{1_i} + v_{1_f}\right) = m_2\left(v_{2_f} - v_{2_i}\right)\left(v_{2_f} + v_{2_i}\right)}{m_1\left(v_{1_i} - v_{1_f}\right) = m_2\left(v_{2_f} - v_{2_i}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{m_1\left(v_{1_i} - v_{1_f}\right)}\left(v_{1_i} + v_{1_f}\right)}{\cancel{m_1\left(v_{1_i} - v_{1_f}\right)}} = \frac{\cancel{m_2\left(v_{2_f} - v_{2_i}\right)}\left(v_{2_f} + v_{2_i}\right)}{\cancel{m_2\left(v_{2_f} - v_{2_i}\right)}}$$

$$\Rightarrow v_{1_i} + v_{1_f} = v_{2_f} + v_{2_i}$$

$$\Rightarrow v_{1_i} - v_{2_f} = v_{2_i} - v_{1_f}$$

$$\Rightarrow v_{1_i} - v_{2_f} = -\left(v_{1_i} - v_{2_f}\right) \quad \textbf{(9)}$$

La ecuación **(9)** resulta algo interesante de analizar porque la velocidad de un cuerpo respecto del otro después del choque, conserva su modulo e invierte su signo. Esto quiere decir que, para un observador moviéndose con una de las partículas percibirá que la otra partícula se acerca y luego del choque se alejará con la misma rapidez.

Ahora podemos relacionar las ecuaciones **(7)** y **(9)** para obtener las velocidades finales en términos de las velocidades iniciales.

Si de la ecuación **(9)** se despeja v_{2_f} y se sustituye en la ecuación **(7)** se obtendrá que:

$$v_{1_f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1_i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2_i} \quad \textbf{(10)}$$

Si de la ecuación **(9)** se despeja v_{1_f} y se sustituye en la ecuación **(7)** se obtendrá que:

$$v_{2_f} = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{2_i} + \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1_i} \quad \textbf{(11)}$$

Coeficiente de Restitución

La mayoría de las colisiones no son ni perfectamente elásticas ni perfectamente inelásticas. Esto se mide a través del coeficiente de restitución $\mathcal{E}$. El cual está dado por el módulo de la razón entre la velocidad relativa de alejamiento después del choque y la velocidad de acercamiento antes del choque:

$$\mathcal{E} = \left|\frac{v_{2_f} - v_{1_f}}{v_{2_i} - v_{1_i}}\right| \quad \textbf{(12)}$$

Este coeficiente puede variar entre **0** y **1**, dependiendo de la cantidad de Energía Cinética que se pierde en el choque.

- Si el choque es perfectamente Inelástico se cumple: $\mathcal{E}$ **= 0**
- Si el choque es perfectamente Elástico se cumple: $\mathcal{E}$ **= 1**

Centro de Masa

El Centro de Masa **(CM)** es el nombre de un punto especial de un sistema. Es decir, es el promedio estadístico de mayor concentración o cantidad de partículas que componen un sistema o cuerpo.

Consideremos un sistema de "**n**" partículas:

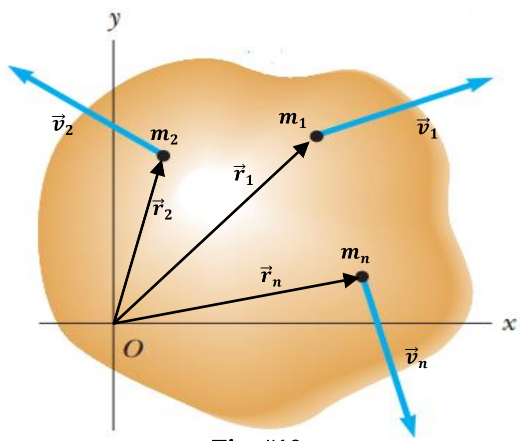


Fig. #10

Se desea la posición de una partícula la cual represente a todo el conjunto de partículas que componen el sistema.

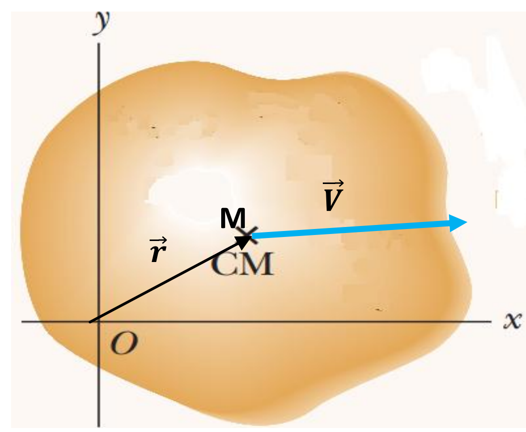


Fig. #11

Si aplicamos el concepto de cantidad de movimiento lineal: $\vec{P} = m\vec{v}$

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_n\vec{v}_n = \vec{P} = \mathrm{M}\vec{V}$$

Definimos **M** como la suma de todas las masas. Es decir:

$$\mathrm{M} = m_1 + m_2 + \cdots + m_n = \sum m_i$$

Entonces:

$$\mathrm{M}\vec{V} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_n\vec{v}_n$$

Se sabe por definición que la derivada de la posición respecto del tiempo es la velocidad, es decir: $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ reemplazando en la ecuación anterior:

$$\mathbf{M}\frac{d\vec{r}}{dt} = m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt} + \cdots + m_n\frac{d\vec{r}_n}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(M\vec{r}) = \frac{d(m_1\vec{r}_1)}{dt} + \frac{d(m_2\vec{r}_2)}{dt} + \cdots + \frac{d(m_n\vec{r}_n)}{dt}$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{d}{dt}}(M\vec{r}) = \cancel{\frac{d}{dt}}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n)$$

$$\Rightarrow M\vec{r} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n = \sum m_i\vec{r}_i$$

Esta última expresión es lo que llamaremos Centro de Masa:

$$M\vec{r}_{CM} = \sum m_i\vec{r}_i \quad \textbf{(13)}$$

Ahora, lo que denominaremos como posición del Centro de Masa $\vec{r}_{CM}$ es una posición promedio ponderado o pesado de masa, que ubica un punto del sistema. Dado por la expresión:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{M} \quad \textbf{(14)}$$

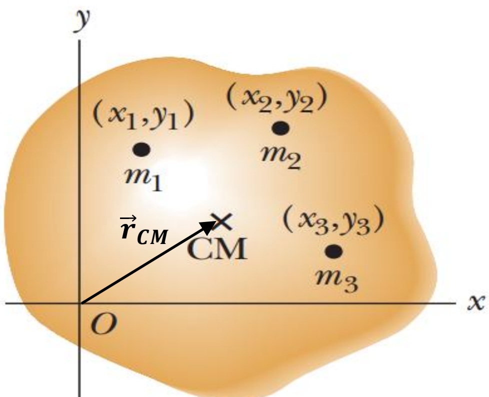


Fig. #12

Este punto puede estar dentro o fuera del sistema. Por lo que la ubicación del Centro de Masa no depende del origen pero el vector que lo ubica sí.

Si la expresión **(14)** se deriva respecto al tiempo **t**. Se obtiene la "Velocidad del Centro de Masa" $\vec{V}_{CM}$

$$\vec{V}_{CM} = \frac{\sum m_i\vec{v}_i}{M} \quad \textbf{(15)}$$

Si la expresión **(15)** se deriva respecto al tiempo **t**. Se obtiene la "Aceleración del Centro de Masa" $\vec{a}_{CM}$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\sum m_i\vec{a}_i}{M} \quad \textbf{(16)}$$

Centro de Masa de Distribución Continua

Ahora bien, el número de partículas de un cuerpo es tan grande y sus espaciamientos entre si son tan pequeños, que podemos considerar al cuerpo como si tuviera una distribución continua de masa.

Para obtener la expresión del "Centro de Masa" para un cuerpo continuo, comenzamos por subdividir el cuerpo en "**n**" pequeño de elementos de masa **Δm**, localizados aproximadamente en $\vec{r}$. Es decir:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum \Delta m_i\vec{r}_i}{\sum \Delta m_i}$$

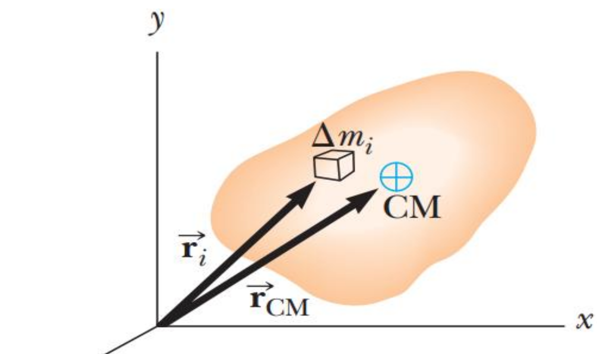


Fig. #13

Consideremos ahora que los elementos se subdividen aún más, de manera que el número "**n**" tiende a infinito, por lo que el cuerpo continuo se subdivide en un número infinito de elementos infinitesimales de masa. Por lo que el centro de masa será dado por:

$$\vec{r}_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0}\frac{\sum \Delta m_i\vec{r}_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{\int \vec{r}\,dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r}\,dm}{M}$$

Obteniendo el vector posición del centro de masa para un cuerpo continuo:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm \quad \textbf{(17)}$$

Cuerpo Rígido

Un cuerpo rígido es cualquier objeto que no se deforma ante cualquier "esfuerzo" que se ejerza sobre él. En virtud de esto, la distancia entre dos puntos cualesquiera del objeto debe permanecer constante con el tiempo independientemente de cualquier esfuerzo aplicado sobre el objeto o movimiento que pueda presentar este.

Movimiento de Traslación

En el estudio del movimiento traslacional se usa el “modelo de partícula” y el objeto en movimiento se describe como una “partícula” sin importr su tamaño. Por lo que, el movimiento traslacional del centro de masa del sistema es el mismo, como si toda la masa del sistema actúara en dicho punto. Es decir, el sistema se mueve como si la fuerza neta se aplicara en una sóla partícula.

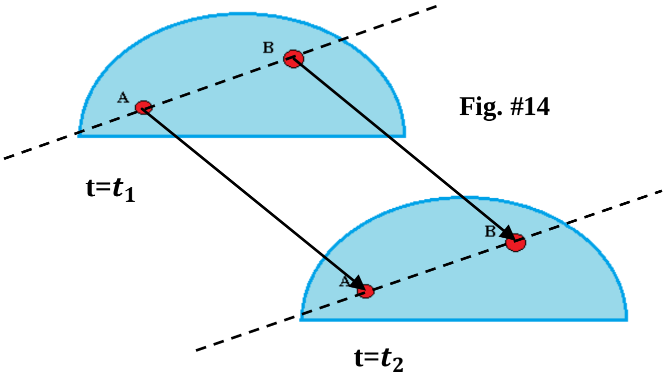


Fig. #14

Al tomar dos puntos materiales de un cuerpo rígido y trazar un recta sobre dichos puntos, se dice que el movimiento es de “traslación” cuando las rectas se trasladan paralelamente así mismo. Por lo cual se cumple que:

$$\vec{v}_A(t) = \vec{v}_B(t) = \vec{V}_{CM}(t) \ \textbf{(18)}$$

Por lo tanto un cuerpo rígido se mueve en traslación si cada partícula del cuerpo experimenta el mismo desplazamiento que todas las demás partículas en un intervalo de tiempo dado.

Movimiento de Rotación

Se tiene un sistema aislado, constituido por partículas las cuales forman un cuerpo rígido.

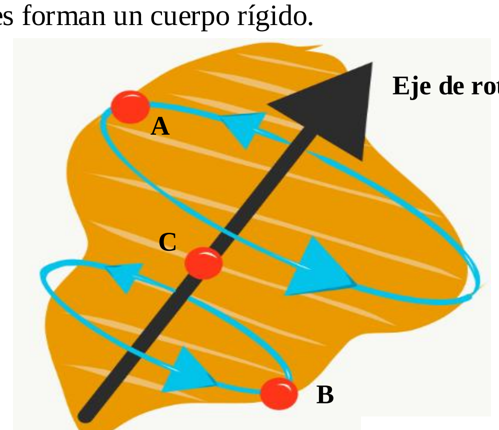


Fig. #15

Entonces decimos que, un cuerpo rígido describe una rotación pura si todas las partículas del cuerpo se mueven en círculos y los centros de esos círculos se encuentran en una línea recta denominada eje de rotación.

Si se traza una recta perpendicular desde cualquier punto del cuerpo al eje de rotación, todas esas rectas barrerán el mismo ángulo en un intervalo de tiempo dado.

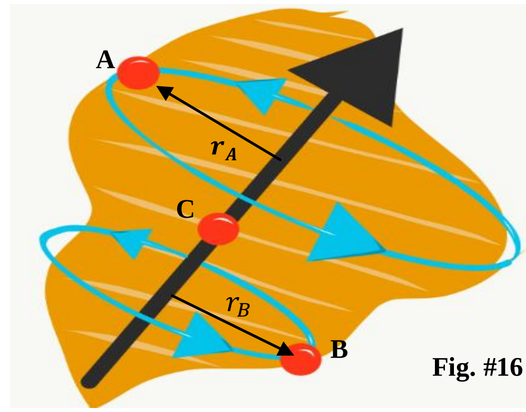


Fig. #16

Así pues, podemos describir la rotación pura de un cuerpo rígido considerando el movimiento de cualquiera de las partículas. Sin embargo podemos eliminar las partículas que se encuentran en el eje de rotación. Porque el movimiento rotacional está referido a un eje denominado “eje de rotación” y este eje está completamente caracterizado con el “momento angular”.

Entonces ¿qué es lo que ocurre con las partículas que están sobre el eje de rotación? Simple, ellas no poseen movimiento rotacional debido a que este solo es perceptible por ellas mismas cuando están a una distancia radial del eje distinto de cero, por lo tanto podemos despreciar dichas partículas.

En este caso se cumple que: $\vec{v}_C = \vec{0}$

Por otra parte si se tiene lo siguiente.

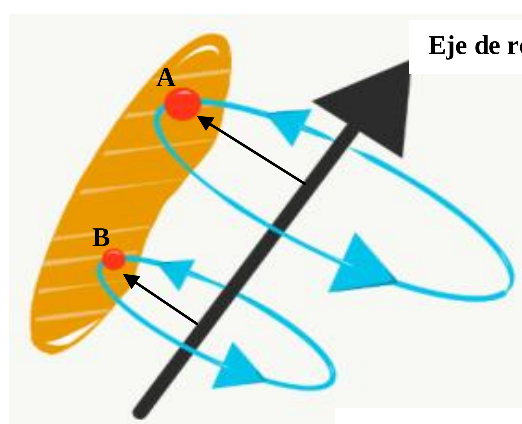


Fig. #17

Se observa que las partículas **A** y **B** giran alrededor del eje fijo por lo que se cumple que la velocidad angular en **A, B y CM** son iguales. Es decir:

$$\vec{\omega}_A(t) = \vec{\omega}_B(t) = \vec{\omega}_{CM}(t) \quad (19)$$

La velocidad angular de un cuerpo rígido tiene carácter absoluto.

Pero la velocidad traslacional en **A** es distinta a la velocidad traslacional en **B**.

$$\vec{V}_A \neq \vec{V}_B$$

Porque la rapidez traslacional se puede expresar como: $|\vec{V}| = \omega R_g$ siendo "R_g" el radio de giro (este es variante pues cada partícula esta a una distancia diferente al eje de rotación).

Por lo tanto: $|\vec{V}_A| > |\vec{V}_B|$

Cinemática Rotacional

Tomaremos un cuerpo rígido formado por muchas partículas.

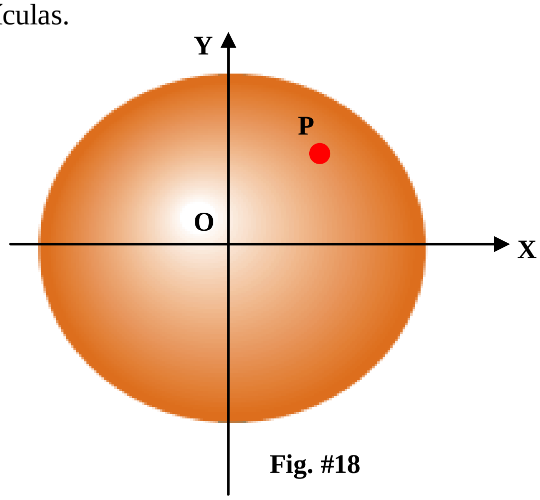


Fig. #18

Posicionamos el sistema de referencia **x-y** y estudiaremos el comportamiento de una partícula "**P**".

Si el cuerpo rota la partícula se estará moviendo en una trayectoria circular.

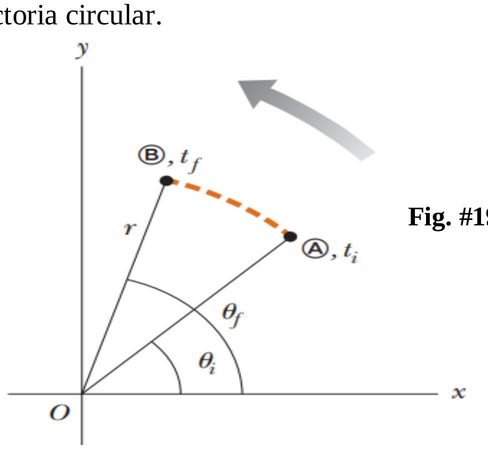


Fig. #19

Sea la partícula "P" en rotación la cual se mueve de **A** a **B** a lo largo del arco de un círculo. En el intervalo de tiempo **ΔT** = t_f - t_o

En la representación de la **Fig. #19,** el ángulo θ (theta) cambia con el tiempo mientras que "**r**" permanece constante. A medida que la partícula se mueve a través de una longitud de arco la cual denominaremos con la letra **S**.

La longitud de arco se relaciona con el ángulo θ mediante la expresión:

$$S = r\theta \quad (20)$$

Luego conforme la partícula en cuestión sobre el objeto rígido viaja de la posición **A** a la posición **B** en un intervalo de tiempo **ΔT,** la línea de referencia fija al objeto cubre un ángulo $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$. Esta cantidad se define como el desplazamiento angular.

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i \quad (21)$$

¿Cómo medir la posición angular en función del tiempo?

Bueno, la rapidez a la que se presenta el desplazamiento angular de la partícula "**P**" puede variar. En este caso definimos la "rapidez angula promedio" como la relación del desplazamiento angular de un objeto rígido al intervalo de tiempo **ΔT**. Esto es:

$$\omega_{prom} = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta T} \quad (22)$$

La "rapidez angular instantánea" se define como el límite de la rapidez angular promedio conforme **ΔT** tiende a cero. Es decir:

$$\omega = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta T} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (23)$$

De esta forma podemos medir el desplazamiento angular en función del tiempo.

Ahora si la rapidez angular instantánea de un objeto cambia de ω_i a ω_f en el intervalo de tiempo ΔT, el objeto tiene una aceleración angular. En pocas palabras, si ω no es constante el objeto tendrá aceleración angular.

La “aceleración angular promedio” de un objeto rígido en rotación se define como la relación de cambio de rapidez angular respecto al intervalo de tiempo $\boldsymbol{\Delta T}$. Esto es:

$$\alpha_{prom} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\omega}{\Delta T} \quad \textbf{(24)}$$

La “aceleración angular instantánea” se define como el límite de la aceleración angular promedio conforme **ΔT** tiende a cero. Es decir:

$$\alpha = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta T} = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad \textbf{(25)}$$

<u>Ecuaciones cinemáticas para movimiento rotacional bajo aceleración constante</u>

Cundo un objeto rígido da vueltas respecto a un eje fijo, con frecuencia se somete a una aceleración angular constante. Es decir: $\alpha = ctt$

Sabemos por la ecuación **(25)** que la derivada de la velocidad angular respecto del tiempo es la aceleración angular: $\frac{d\omega}{dt} = \alpha$

Despejando “**dt**” al lado derecho se obtiene:

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha \Rightarrow \mathrm{d}\omega = \alpha \mathrm{dt}$$

Se integra a ambos lados de la ecuación teniendo en cuenta que los límites de integración están dados por:

$$\Delta\omega \in [\omega_i, \omega_f] \text{ y } \Delta T \in [t_i = 0, t_f = t]$$

Sea:

$$\mathrm{d}\omega = \alpha \mathrm{dt}$$

$$\int_{\omega_i}^{\omega_f} d\omega = \int_{t_i}^{t_f} \alpha dt \Rightarrow \int_{\omega_i}^{\omega_f} d\omega = \int_0^t \alpha dt$$

$$\Rightarrow (\omega]_{\omega_i}^{\omega_f} = \alpha(t]_0^t$$

$$\Rightarrow \omega_f - \omega_i = \alpha t$$

$$\Rightarrow \omega_f = \alpha t + \omega_i \quad \textbf{(26)}$$

Esta ecuación permite encontrar la velocidad angular final “ ω_f" del objeto en cualquier tiempo posterior a **t**.

Sabemos por la ecuación **(23)** que la derivada de la posición angula respecto del tiempo es la velocidad angular: $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ Siendo: $\omega = \omega_f = \alpha t + \omega_i$

Despejando “**dt**” al lado derecho se obtiene:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \Rightarrow \mathrm{d}\theta = \omega \mathrm{dt}$$

Se integra a ambos lados de la ecuación teniendo en cuenta que los límites de integración están dados por:

$$\Delta\theta \in [\theta_i, \theta_f] \text{ y } \Delta T \in [t_i = 0, t_f = t]$$

Sea:

$$\mathrm{d}\theta = \omega \mathrm{dt}$$

$$\int_{\theta_i}^{\theta_f} d\theta = \int_{t_i}^{t_f} \omega dt \Rightarrow \int_{\theta_i}^{\theta_f} d\theta = \int_0^t \omega dt$$

Sustituimos: $\omega = \omega_f = \alpha t + \omega_i$

$$\Rightarrow \int_{\theta_i}^{\theta_f} d\theta = \int_0^t (\alpha t + \omega_i) dt$$

$$\Rightarrow (\theta]_{\theta_i}^{\theta_f} = (\frac{1}{2} \alpha t^2 + \omega_i t]_0^t$$

$$\Rightarrow \theta_f - \theta_i = \frac{1}{2} \alpha t^2 + \omega_i t$$

$$\Rightarrow \theta_f = \frac{1}{2} \alpha t^2 + \omega_i t + \theta_i \quad \textbf{(27)}$$

Esta ecuación permite encontrar la posición angular final “ θ_f" del objeto en cualquier tiempo posterior a **t**.

Ahora si deseamos eliminar el parámetro del tiempo **t** de la ecuación **(26),** se procede a definir la rapidez angular en función de θ. Esto es: $\omega = \omega(\theta)$

Si se deriva la velocidad angular en función de θ (Derivada por regla de la cadena) se obtiene:

$$\frac{d\omega}{d\theta} . \frac{d\theta}{dt} = \alpha$$

Se sabe por definición que la derivada de la posición angular respecto del tiempo es la velocidad angular, es decir: $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ reemplazando en la ecuación anterior:

$$\frac{d\omega}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = \alpha \Rightarrow \frac{d\omega}{d\theta}.\omega = \alpha$$

Despejando "$\mathbf{d\theta}$" al lado derecho se obtiene:

$$\frac{d\omega}{d\theta}.\omega = \alpha \Rightarrow \omega d\omega = \alpha d\theta$$

Se integra a ambos lados de la ecuación teniendo en cuenta que los límites de integración están dados por:

$\Delta\omega\ \epsilon\ [\omega_i, \omega_f]$ y $\Delta\theta \epsilon\ [\theta_i, \theta_f]$

Sea:

$$\omega d\omega = \alpha d\theta$$

$$\Rightarrow \int_{\omega_i}^{\omega_f} \omega d\omega = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \alpha d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\omega^2]_{\omega_i}^{\omega_f} = \alpha(\theta]_{\theta_i}^{\theta_f}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left({\omega^2}_f - {\omega^2}_i\right) = \alpha\left(\theta_f - \theta_i\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left({\omega^2}_f - {\omega^2}_i\right) = \alpha\Delta\theta$$

$${\omega^2}_f = 2\alpha\Delta\theta + {\omega^2}_i \quad (28)$$

Obteniendo una relación libre de la dependencia del parámetro del tiempo **t**.

Por otra parte si se desea eliminar la aceleración angular de la ecuación **(27),** tomaremos la ecuación **(26)** y la expresamos de la siguiente manera:

$$\omega_f = \alpha t + \omega_i \Rightarrow \alpha t = \omega_f - \omega_i$$

Sustituimos la expresión en la ecuación **(27)** de la siguiente forma:

$$\theta_f = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_i t + \theta_i$$

$$\Rightarrow \theta_f = \frac{1}{2}(\alpha t)t + \omega_i t + \theta_i$$

$$\Rightarrow \theta_f = \frac{1}{2}\left(\omega_f - \omega_i\right)t + \omega_i t + \theta_i$$

$$\Rightarrow \theta_f = \frac{1}{2}\omega_f t - \frac{1}{2}\omega_i t + \omega_i t + \theta_i$$

$$\Rightarrow \theta_f = \frac{1}{2}\omega_f t + \frac{1}{2}\omega_i t + \theta_i$$

$$\Rightarrow \theta_f = \frac{1}{2}\left(\omega_f + \omega_i\right)t + \theta_i \quad (29)$$

Obteniendo la posición angular libre de la aceleración angular.

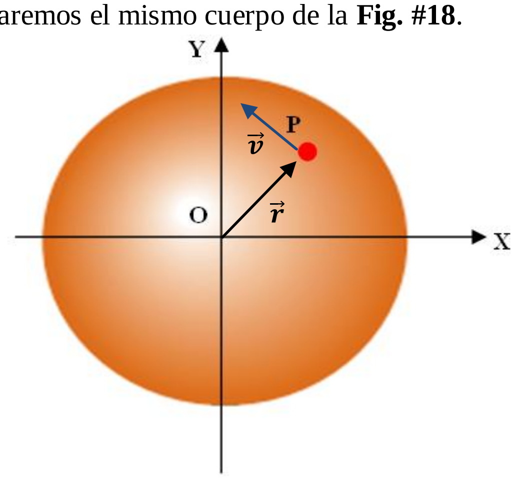
Se puede observar que estas expresiones cinemáticas para el objeto rígido bajo "aceleración angular constante" **(α = ctt)** son de la misma forma matemática que para una partícula bajo "aceleración constante" **(a = ctt)**.

Movimiento rotacional en torno a un eje fijo	Movimiento traslacional
$\omega_f = \omega_i + \alpha t$	$v_f = v_i + at$
$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2$
$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$	$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$
$\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t$	$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_i + v_f)t$

Tabla #1

Calculo de la Posición, Velocidad y Aceleración de una partícula que se mueve en una trayectoria circular

Tomaremos el mismo cuerpo de la **Fig. #18**.



La partícula "**P**" se mueve con una trayectoria circular y a una distancia **r** fija y constante del origen **O**.

Procedemos a escribir la posición de dicha partícula en coordenadas cartesianas de la siguiente forma:

Sea la partícula:

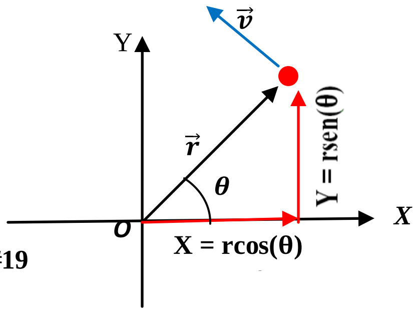


Fig. #19

Siendo el vector posición dado por:

$$\vec{r} = X\hat{\imath} + Y\hat{\jmath}$$

Podemos expresar la posición de dicha partícula en función de un sistema de referencia el cual estará posicionado sobre la partícula "**P**". Este sistema de referencia será equivalente al sistema de referencia rectangulares empleados en la **Fig. #19**

Los dos sistemas estarán relacionados por las relaciones:

$$(X, Y) \Longrightarrow (r, \theta) \begin{cases} X = rcos(\theta) \\ Y = rsen(\theta) \end{cases}$$

$$(\textbf{Coordenadas Polares})$$

Por lo tanto se puede escribir el vector posición de coordenadas cartesianas a coordenadas polares de la siguiente forma:

$$\vec{r} = X\hat{\imath} + Y\hat{\jmath}$$

$$\Longrightarrow \vec{r} = rcos(\theta)\hat{\imath} + rsen(\theta)\,\hat{\jmath}$$

Sacamos como factor común **"r"** el cual se mantiene constante.

$$\vec{r} = r[cos(\theta)\hat{\imath} + sen(\theta)\,\hat{\jmath}]$$

$$\Longrightarrow \vec{r} = r\,\hat{r}$$

Llamaremos "Versor Radial" al vector unitario

$$\hat{r} = cos(\theta)\hat{\imath} + sen(\theta)\,\hat{\jmath}$$

De esta manera obtenemos el Vector Posición en coordenadas polares dado por:

$$\vec{r} = r\,\hat{r} \quad \textbf{(30)}$$

Este vector esta en dirección y sentido de la "**r**" creciente, está dirigido radialmente hacia afuera a partir del origen.

Si derivamos el vector posición en función del tiempo **t**. Se obtendrá el vector velocidad. Esto es:

$\vec{r} = r\,\hat{r}$ Derivando respecto a **t**.

$$\Longrightarrow \vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r} = \frac{d}{dt}(r\,\hat{r}) = r\frac{d}{dt}\hat{r}$$

$$\Longrightarrow \vec{v} = r\frac{d}{dt}[cos(\theta)\hat{\imath} + sen(\theta)\,\hat{\jmath}]$$

$$\Longrightarrow \vec{v} = r\left[\frac{d}{dt}cos(\theta)\hat{\imath} + \frac{d}{dt}sen(\theta)\,\hat{\jmath}\right]$$

$$\Longrightarrow \vec{v} = r\left[-sen(\theta)\frac{d\theta}{dt}\hat{\imath} + cos(\theta)\frac{d\theta}{dt}\,\hat{\jmath}\right]$$

Teniendo en cuenta que: $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ sustituyendo en la expresión anterior.

$$\Longrightarrow \vec{v} = r[-sen(\theta)\omega\hat{\imath} + cos(\theta)\omega\,\hat{\jmath}]$$

Sacamos como factor común ω

$$\Longrightarrow \vec{v} = r\omega[-sen(\theta)\hat{\imath} + cos(\theta)\,\hat{\jmath}]$$

$$\Longrightarrow \vec{v} = r\omega\hat{\theta}$$

Llamaremos "Versor Tangencial" al vector unitario

$$\hat{\theta} = -sen(\theta)\hat{\imath} + cos(\theta)\hat{\jmath}$$

De esta manera obtenemos el Vector Velocidad en coordenadas polares dado por:

$$\vec{v} = r\omega\hat{\theta} \quad \textbf{(31)}$$

Este vector esta en el sentido de θ creciente, siempre es tangente al círculo o trayectoria circular que describe la partícula "**P**" y su sentido es contrario al de las manecillas del reloj.

Si derivamos el vector velocidad en función del tiempo **t**. Se obtendrá el vector aceleración. Esto es:

$\vec{v} = r\omega\hat{\theta}$ Derivando respecto a **t**.

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\omega\hat{\theta}) = r\frac{d}{dt}(\omega\hat{\theta})$$

Se aplica la derivada del producto

$$\Rightarrow \vec{a} = r\left[\frac{d}{dt}(\omega)\hat{\theta} + \omega\frac{d}{dt}(\hat{\theta})\right]$$

$$\Rightarrow \vec{a} = r\left[\frac{d}{dt}(\omega)\hat{\theta} + \omega\frac{d}{dt}(-sen(\theta)\hat{\imath} + cos(\theta)\hat{\jmath})\right]$$

$$\Rightarrow \vec{a} = r\left[\frac{d}{dt}(\omega)\hat{\theta} + \omega\left(-\frac{d}{dt}sen(\theta)\hat{\imath} + \frac{d}{dt}cos(\theta)\hat{\jmath}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \vec{a} = r\left[\frac{d}{dt}(\omega)\hat{\theta} + \omega\left(-cos(\theta)\frac{d\theta}{dt}\hat{\imath} - sen(\theta)\frac{d\theta}{dt}\hat{\jmath}\right)\right]$$

Teniendo en cuenta que: $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ y $\frac{d\omega}{dt} = \alpha$ sustituyendo en la expresión anterior.

$$\Rightarrow \vec{a} = r[\alpha\hat{\theta} + \omega(-cos(\theta)\omega\hat{\imath} - sen(\theta)\omega\hat{\jmath})]$$

Sacamos factor común – ω del lado derecho de la expresión

$$\Rightarrow \vec{a} = r[\alpha\hat{\theta} - \omega^2(cos(\theta)\hat{\imath} + sen(\theta)\hat{\jmath})]$$

Siendo: $\hat{r} = cos(\theta)\hat{\imath} + sen(\theta)\,\hat{\jmath}$ se sustituye

$$\Rightarrow \vec{a} = r[\alpha\hat{\theta} - \omega^2\hat{r}]$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \alpha r\,\hat{\theta} - \omega^2 r\hat{r}$$

De esta manera obtenemos el Vector Aceleración en coordenadas polares dado por:

$$\vec{a} = \alpha r\,\hat{\theta} - \omega^2 r\hat{r} \quad (32)$$

En el vector aceleración se observa lo siguiente.

- El primer término $(\alpha r\,\hat{\theta})$ es la componente vectorial que es tangente a la trayectoria de la partícula y proviene del cambio de magnitud de la velocidad en el movimiento circular. Este término se llama "Aceleración Tangencial" (a_T).

- El segundo término $(-\omega^2 r\hat{r})$ es la componente vectorial que va dirigida radialmente hacia el centro del círculo y proviene de un cambio de la dirección de la velocidad en el movimiento circular. Este término se llama "Aceleración Centrípeta" (a_C).

En la siguiente ilustración se puede observar el comportamiento de la partícula "**P**" y el sistema de referencia móvil posicionado sobre esta misma.

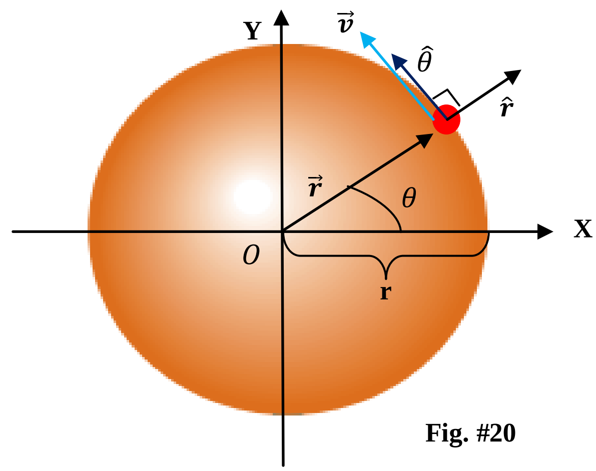


Fig. #20

Observación, los versores $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ son perpendiculares entre sí. Por lo que su producto punto es cero.

Relaciones entre cantidades angulares y traslacionales

Sea la partícula "**P**" en rotación esta posee una velocidad angular "$\vec{\omega}$" la cual es la relación entre el ángulo central θ que barre entre la unidad de tiempo.

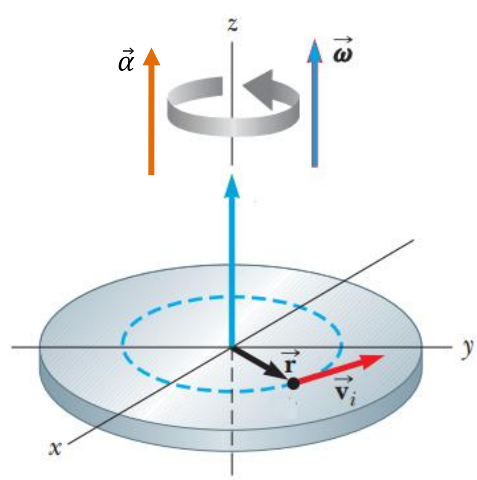


Fig. #21

Este es un vector perpendicular al plano de rotación.

El sentido de rotación del vector velocidad angular se determina según la regla de la mano derecha. Se puede expresar de la siguiente manera:

$$\vec{\omega} = |\vec{\omega}|\hat{\omega} \quad (33)$$

Donde:

- $|\vec{\omega}|$ **:** Es la magnitud del vector.
- $\hat{\omega}$ **:** Es un vector unitario perpendicular al plano de rotación el cual se determina por medio de la "Regla de la mano derecha". (En el ejemplo de la **Fig. #21** este vector corresponde a $\hat{\omega} = \hat{k}$)

El vector velocidad traslacional $\vec{v}$ de la **Fig. #21,** siempre es tangente a la trayectoria circular y por ende se llama "velocidad tangencial".

Recordemos por la ecuación **(20)**, que la longitud de arco se escribe como:

$$S = r\theta$$

Si se deriva esta expresión respecto del tiempo **t**, se obtiene:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(r\theta) = r\frac{d\theta}{dt}$$

$$\Longrightarrow \frac{dS}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

Teniendo en cuenta que: $\frac{d\theta}{dt} = \omega$

Además, la magnitud de la velocidad tangencial del punto "**P**" es por definición la rapidez tangencial y esta viene dada por: $v = \frac{dS}{dt}$

Sustituyendo en la expresión anterior se obtiene que:

$$\frac{dS}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \Longrightarrow v = r\omega$$

Es decir, la rapidez tangencial del punto "**P**" sobre un objeto rígido en rotación es igual a la distancia perpendicular de dicho punto desde el eje de rotación, multiplicada por la rapidez angular.

$$v = r\omega \quad \textbf{(34)}$$

Aunque cada punto sobre el objeto rígido tiene la misma rapidez angular, no todo punto tiene la misma rapidez tangencial porque "r" no es el mismo para todos los puntos sobre el objeto.

Si se desea expresar la velocidad tangencial como el producto de dos vectores nos fijamos en la **Fig. #21.** Donde se observa que al efectuar el producto cruz del vector velocidad angular por el vector posición da como resultado el vector velocidad tangencial.

$$\vec{v} = \vec{\omega} x \vec{r} \quad \textbf{(35)}$$

Por otra parte se sabe que la aceleración posee dos componentes una componente radial y una tangencial para cuando "r" permanece constante.

Sea la magnitud de la componente radial dada por:

$$a_C = \omega^2 r$$

Si se toma la ecuación **(34)** y se despeja ω

$v = r\omega \Longrightarrow \omega = \frac{v}{r}$ Se sustituye en a_C se obtiene:

$$a_C = \omega^2 r = \left(\frac{v}{r}\right)^2 r = \frac{v^2}{r^{\cancel{2}}}\cancel{r} = \frac{v^2}{r}$$

Por lo que la aceleración radial se puede expresar como:

$$a_C = \frac{v^2}{r} \quad \textbf{(36)}$$

Si se toma la ecuación **(35)** y se deriva respecto al tiempo **t** se obtiene la aceleración. Es decir:

$$\vec{v} = \vec{\omega} x \vec{r}$$

$$\Longrightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} x \vec{r})$$

Se aplica la derivada del producto

$$\Longrightarrow \vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} x \vec{r}) = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}) x \vec{r} + \vec{\omega} x \frac{d}{dt}(\vec{r})$$

Teniendo en cuenta que: $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha}$ y $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$

Sustituyendo en la expresión anterior

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}) x \vec{r} + \vec{\omega} x \frac{d}{dt}(\vec{r}) = \vec{\alpha} x \vec{r} + \vec{\omega} x \vec{v}$$

De esta manera podemos expresar la aceleración como el producto cruz de:

$$\Rightarrow \vec{a} = \vec{\alpha} x \vec{r} + \vec{\omega} x \vec{v} \quad \textbf{(37)}$$

Donde:

- La componente tangencia está dada por la forma:

$$\vec{a}_T = \vec{\alpha} x \vec{r} \quad \textbf{(38)}$$

- La componente radial está dada por la forma:

$$\vec{a}_C = \vec{\omega} x \vec{v}$$

Además, si se sustituye la velocidad por el producto cruz entre la velocidad angular y la posición, esta también se puede expresar como:

$$\vec{a}_C = \vec{\omega} x \vec{v} = \vec{\omega} x (\vec{\omega} x \vec{r}) \quad \textbf{(39)}$$

<u>Movimiento Rototraslatorio</u>

El movimiento "Rototraslatorio" de un cuerpo rígido se descompone en dos puntos.

1- La traslación del centro de masa del cuerpo.
2- La rotación alrededor del centro de masa del cuerpo.

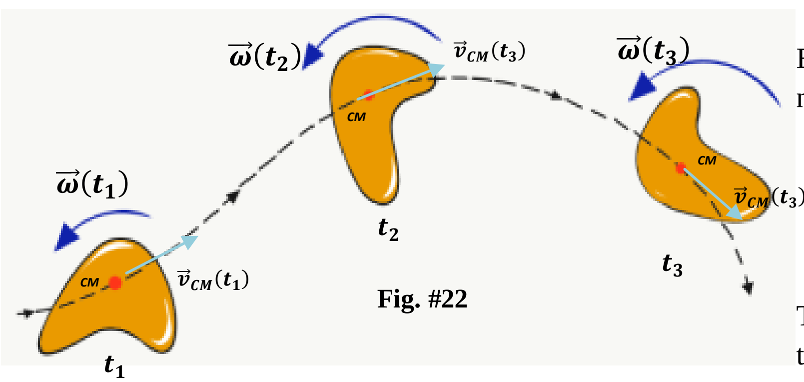


Fig. #22

Por lo que el cuerpo experimenta un movimiento de rotación porque este gira en torno a un eje y también experimenta un movimiento de traslación. Por consiguiente, sería de esperarse que el movimiento del cuerpo u objeto se trate de una combinación de un movimiento de traslación y uno de rotación.

Sin embargo, el movimiento rototraslatorio se puede describir de manera equivalente a un "movimiento de rotación pura" alrededor de un punto. Este punto en particular se denomina "Centro Instantáneo de Rotación" (CIR).

¿Cómo calcular el Centro Instantáneo de Rotación (CIR)?

Este se obtiene trazando "Sendas rectas perpendiculares" a los vectores velocidad de cada punto material (velocidades no colineales) siendo la intersección de estas rectas un punto en común llamado "Centro Instantáneo de Rotación".

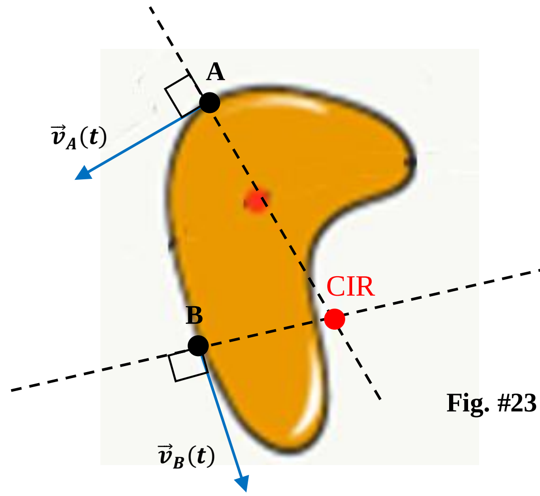


Fig. #23

Es importante destacar que este punto denominado (CIR) no posee velocidad es decir:

$$\vec{v}_{CIR} = \vec{0}$$

<u>Condición de Rodadura</u>

Tomemos el caso de un sólido que esta rotando y trasladándose sobre una superficie como es el caso a continuación:

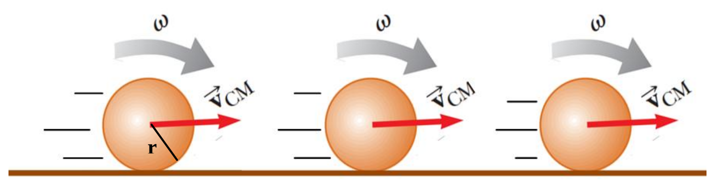


Fig. #24

La condición de rodadura significa que, en un instante cualquiera, los puntos del cuerpo rígido que están en contacto con la superficie lisa se encuentran momentáneamente en reposo.

Esto es lo que se conoce como rodar sin deslizar.

En este caso existe una condición de ligadura que relaciona la velocidad con la que se "traslada" el centro de masa "**CM**" y la velocidad angular de "rotación".

Observemos que:

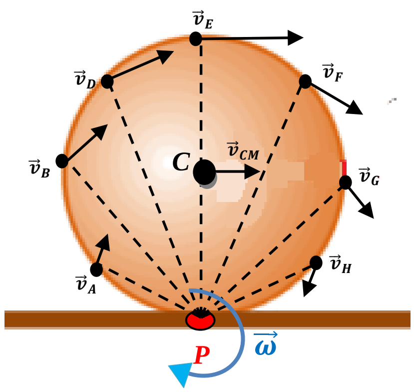


Fig. #25

En un instante cualquiera, la parte baja del sólido se encuentra en reposo en la superficie, puesto que no desliza. En el punto de contacto "***P***" se encuentra el (**CIR**). Por este punto pasara el "eje instantáneo de rotación". Por lo que el cuerpo se puede considerar en un instante cualquiera como si estuviera girando en torno de un eje perpendicular al plano de la **Fig. #25** y que pasa por el punto de contacto "***P***".

Al no haber deslizamiento el punto "***P***" del cuerpo que se halla en contacto con la superficie este posee velocidad nula con respecto a la superficie. Es decir:

$$\vec{v}_P = \vec{0}$$

Cuando el sólido gira un cierto ángulo $\boldsymbol{\theta}$, el centro del mismo experimenta un desplazamiento horizontal.

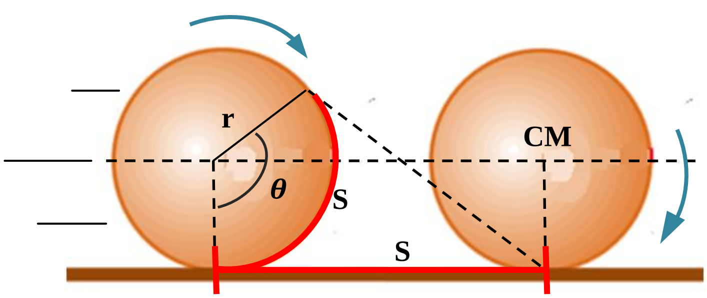


Fig. #26

Para que el sólido ruede sin deslizar, el desplazamiento del **CM** debe coincidir con el arco **S** correspondiente al ángulo girado. La relación existente entre estas dos magnitudes está dada por la ecuación **(20)**, esta es:

$$S = r\theta$$

Al derivar esta expresión se obtiene:

$$v_{CM} = \frac{dS}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

Puesto que la variación del ángulo girado es la velocidad angular de rotación. Es decir: $\frac{d\theta}{dt} = \omega$

Se tiene finalmente que:

$$v_{CM} = r\omega \quad \textbf{(40)}$$

Esta expresión es la "Condición de Rodadura" y nos da la relación que debe haber entre la velocidad de traslación del **CM** y la velocidad angular de rotación para que el sólido ruede sin deslizar.

Ahora claramente el movimiento de rototraslación del sólido se puede visualizar como la superposición de dos movimientos elementales.

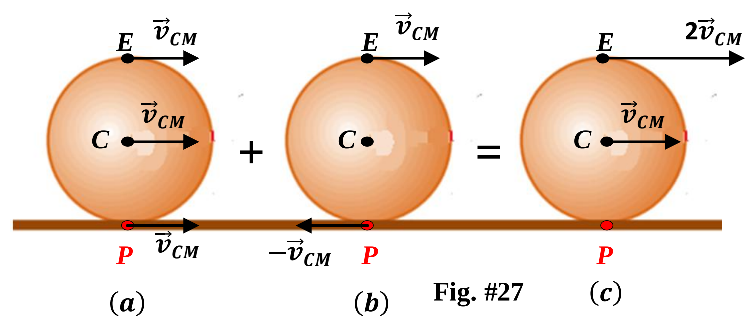


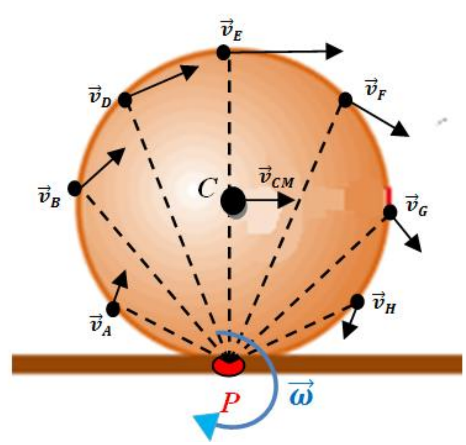
Fig. #27

Caso (a): Traslación pura, todos los puntos se mueven con la misma velocidad.

Caso (b): Rotación Pura en torno al punto **C**, los puntos opuestos se mueven con velocidades opuestas y el centro se encuentra en reposo.

Caso (c): La rotación y la traslación combinadas se obtienen sumando los vectores correspondientes de los **Caso** (a) y (b).

Si se desea calcular la velocidad de cualquier partícula perteneciente al sólido respecto al punto de contacto "***P***" siendo este **(CIR)** y por donde pasa el eje instantáneo de rotación como el mostrado en la **Fig. #25.**



Observemos que si estamos posicionados en el punto "***P***", es decir, si el sistema de referencia lo ponemos en dicho punto y medimos la posición de cada partícula respecto a este.

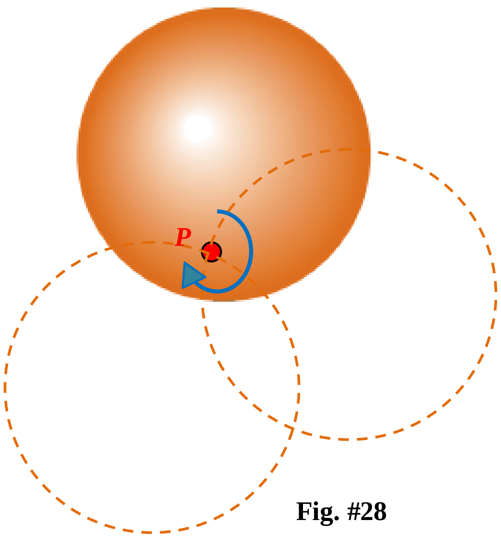


Fig. #28

Veámoslo de la siguiente forma:

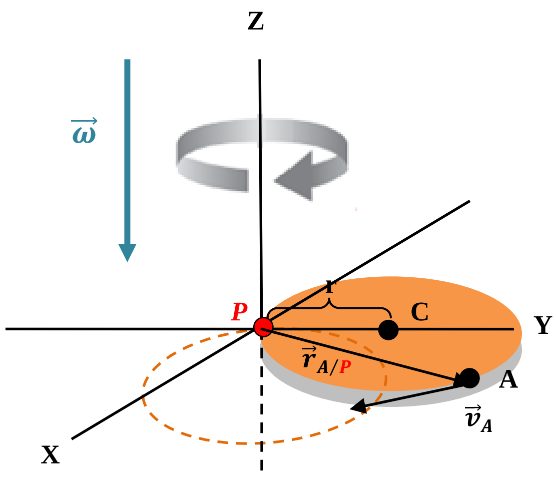


Fig. #29

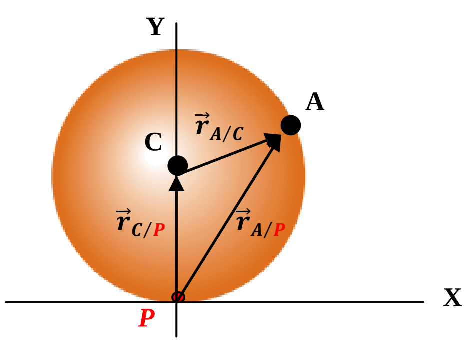


Fig. #30

Procedemos a escribir la posición de la partícula **A** la cual rota alrededor del punto "***P***". Para ello lo descomponemos en la suma de dos vectores.

Esta es dada por:

$$\vec{r}_{A/P} = \vec{r}_{C/P} + \vec{r}_{A/C}$$

Procedemos a derivar la expresión respecto del tiempo **t** para obtener la velocidad.

$$\vec{v}_{A/P} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_{A/P}) = \frac{d}{dt}(\vec{r}_{C/P}) + \frac{d}{dt}(\vec{r}_{A/C})$$

Sabiendo que: $\frac{d}{dt}(r) = v$ Sustituimos:

$$\vec{v}_{A/P} = \vec{v}_{C/P} + \vec{v}_{A/C}$$

Ahora usando la regla de la mano derecha podemos expresar la velocidad del punto **A** respecto del punto **C** como el producto cruz de los vectores velocidad angular y el vector posición de la siguiente manera:

$$\vec{v}_{A/C} = \vec{\omega} x \vec{r}_{A/C}$$

Sustituyendo esto en la expresión antes obtenida:

$$\vec{v}_{A/P} = \vec{v}_{C/P} + \vec{v}_{A/C}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{A/P} = \vec{v}_{C/P} + \vec{\omega} x \vec{r}_{A/C}$$

Esto se conoce como "Campo de velocidad de un cuerpo".

$$\vec{v}_{A/P} = \vec{v}_{C/P} + \vec{\omega} x \vec{r}_{A/C} \quad \textbf{(41)}$$

Al derivar esta ecuación se lograr obtener lo siguiente:

$$\vec{a}_{A/P} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_{A/P}) = \frac{d}{dt}(\vec{v}_{C/P}) + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} x \vec{r}_{A/C})$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{A/P} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_{C/P}) + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} x \vec{r}_{A/C})$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{A/P} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_{C/P}) + \frac{d}{dt}(\vec{\omega}) x \vec{r}_{A/C} + \vec{\omega} x \frac{d}{dt}(\vec{r}_{A/C})$$

Siendo: $\frac{d}{dt}(v) = a$ y $\frac{d}{dt}(\omega) = \alpha$

Sustituyendo se obtiene:

$$\Rightarrow \vec{a}_{A/P} = \vec{a}_{C/P} + \vec{\alpha} x \vec{r}_{A/C} + \vec{\omega} x \vec{v}_{A/C}$$

Esto se conoce como "Campo de aceleración de un cuerpo".

$$\vec{a}_{A/P} = \vec{a}_{C/P} + \vec{\alpha} x \vec{r}_{A/C} + \vec{\omega} x \vec{v}_{A/C} \quad \textbf{(42)}$$

Momento de Inercia

El momento de inercia es una medida de la resistencia de un objeto a cambios en su movimiento rotacional. Es decir, es la resistencia que oponen los cuerpos a modificar su estado de movimiento o quietud.

Tomemos el caso de una partícula que rota alrededor de un eje.

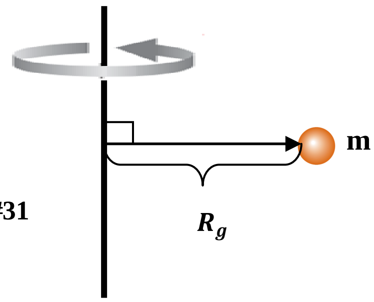


Fig. #31

El momento de inercia para una partícula se define como el producto de su masa por la distancia perpendicular que existe del eje de rotación hasta la partícula al cuadrado. Es decir:

$$I = mR_g{}^2 \quad (43)$$

Observe que si la partícula esta sobre el eje de rotación esta no presenta momento de inercia porque $R_g = 0$

Ahora el momento de inercia para un sistema de partículas se define como la suma de los momentos individuales de inercias de cada una de las partículas respecto al eje de rotación. Es decir:

$$I_S = m_1R_{g1} + m_2R_{g2} + m_3R_{g3} + \cdots + m_nR_{gn}$$

$$\Rightarrow I_S = I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_n = \sum_{i=1}^{n} I_i$$

$$\Rightarrow I_S = \sum_{i=1}^{n} I_i \quad (44)$$

Nota: El momento de inercia de un objeto depende de su elección del eje de rotación. Por lo tanto, no hay un solo valor del momento de inercia para un objeto. Existe un valor mínimo del momento de inercia, que es el calculado en torno a un eje que pasa a través del centro de masa del objeto.

Teorema de los ejes paralelos

Dado un eje que pasa por el centro de masa "**CM**" de un sólido y dado un segundo eje paralelo al primero:

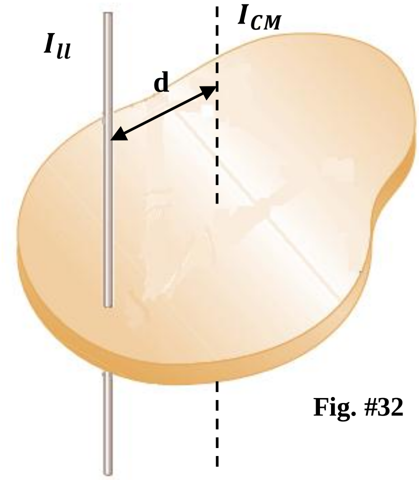


Fig. #32

El momento de inercia de ambos ejes está relacionado mediante la expresión:

$$I_{\parallel} = I_{CM} + M_T d^2 \quad (45)$$

Donde:

- $I_{\parallel}$**:** Es el momento de inercia del cuerpo según el eje que no pasa a través del centro de masa.
- I_{CM}**:** Es el momento de inercia del cuerpo según el eje que pasa a través del centro de masa.
- M_T: Es la masa total del objeto.
- d: Es la distancia perpendicular que existe entre ambos ejes.

Teorema de los ejes perpendiculares

Para determinar el momento de inercia de un objeto rígido que se encuentra totalmente dentro de un plano, alrededor de un eje el cual es perpendicular a dicho plano.

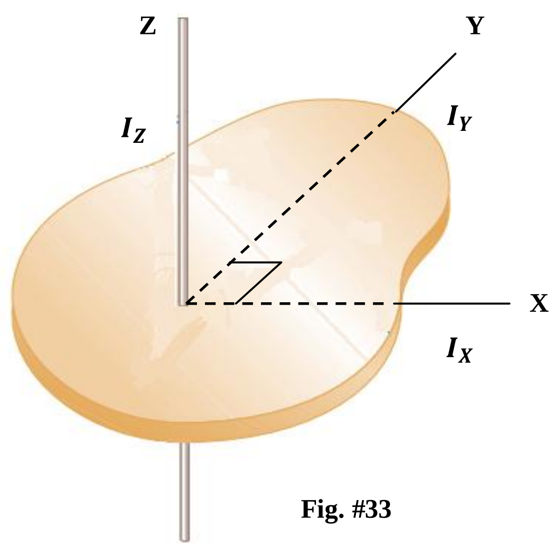


Fig. #33

El momento de inercia de este eje que es perpendicular al plano vendrá dado por la suma de los momentos de inercia correspondientes a los ejes que pertenecen o se encuentran en el plano y que son perpendiculares entre sí. A demás poseen en común el mismo punto de intersección. La expresión está dada por:

$$I_Z = I_X + I_Y \quad (46)$$

Momento de inercia de cuerpos continuos

Como un cuerpo está constituido por una cantidad muy grande de partículas, podemos considerar al cuerpo como si tuviera una distribución continua de masa.

Para obtener la expresión del "Momento de inercia de un cuerpo continuo" imaginemos que el objeto está dividido en una cantidad "**n**" de elementos pequeños de masa **Δm** y cada uno de estos elementos se encuentra a una distancia "**r**" perpendicular al eje de rotación. Es decir:

$$I = \sum r_i^2 \, \Delta m_i$$

Consideremos ahora que los elementos se subdividen aún más, de manera que el número "**n**" tiende a infinito, por lo que el cuerpo continuo se subdivide en un número infinito de elementos infinitesimales de masa y distancias perpendiculares al eje de rotación. Esto es:

$$I = \lim_{\Delta m \to 0} \sum r_i^2 \, \Delta m_i = \int r_i^2 \, dm$$

Siendo la expresión del momento de inercia para un cuerpo continuo dado por:

$$I = \int r_i^2 \, dm \quad (47)$$

Momentos de inercia de cuerpos rígidos homogéneos

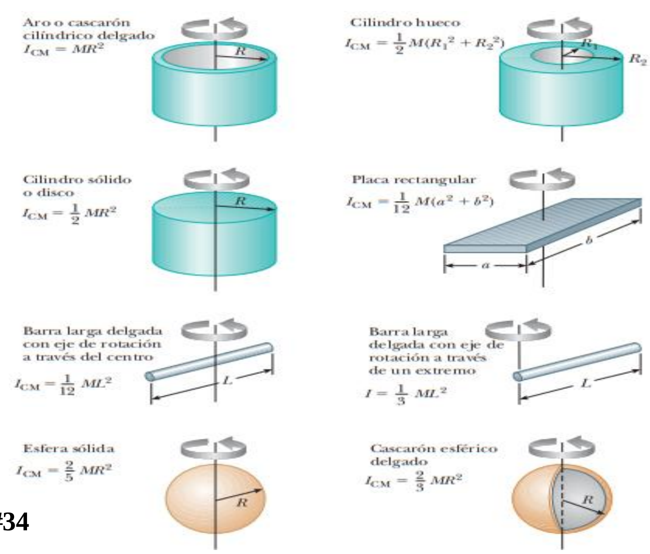


Fig. #34

Producto de Inercia

El producto de inercia de un área está definido respecto a un par de ejes perpendiculares entre sí, los cuales se encuentran en el plano de dicha área.

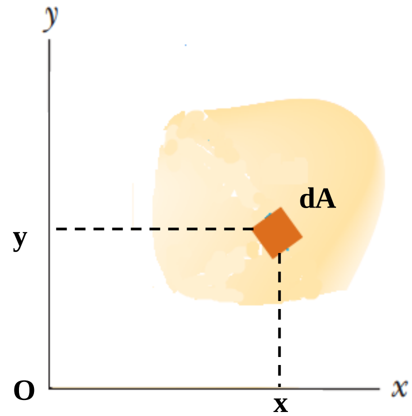


Fig. #35

Para la figura mostrada se define el producto de inercia respecto a los ejes **X** e **Y** de la siguiente manera:

$$I_{xy} = \int xy\,dA \quad (48)$$

De esta definición se observa que cada elemento diferencial de área **dA** es multiplicado por el producto de sus coordenadas.

Como consecuencia los productos de inercia pueden ser:

- Positivos
- Negativos
- Cero

Dependiendo de su posición respecto a los ejes de coordenadas.

Tenemos que el producto de inercia par cada cuadrante será:

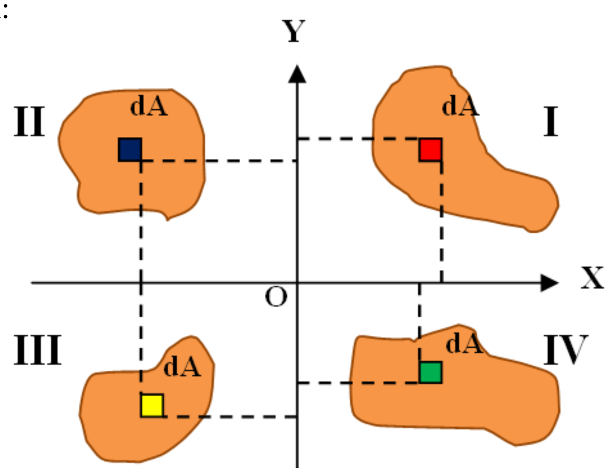


Fig #36

- **I Cuadrante:** Positivo
- **II Cuadrante:** Negativo
- **III Cuadrante:** Positivo
- **IV Cuadrante:** Negativo

Cuando el área se encuentra en más de un cuadrante ¿Qué signo posee?

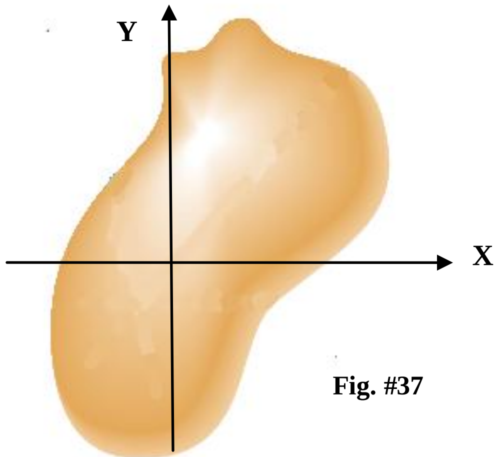


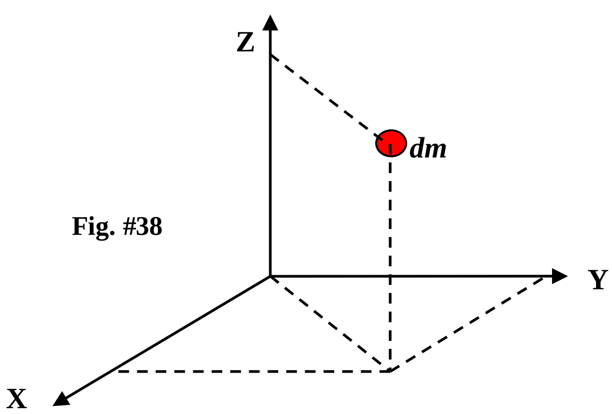
Fig. #37

Este signo dependerá de la distribución de área de cada cuadrante. Por lo tanto el signo estará dado por el cuadrante que tenga mayor cantidad de área.

Nota: El producto de inercia de un área "es cero" con respecto a cualquier par de eje, "si al menos uno de ellos es un eje de simetría" del área.

Ahora si se trata de un sólido rígido es prácticamente lo mismo. Sea:

Fig. #38



Los productos de inercia son:

Asociados al eje X $\begin{cases} I_{XY} = -mxy \\ I_{XZ} = -mxz \end{cases}$

Asociados al eje Y $\begin{cases} I_{YX} = -myx \\ I_{YZ} = -myz \end{cases}$

Asociados al eje Z $\begin{cases} I_{ZX} = -mzx \\ I_{ZY} = -mzy \end{cases}$

Se observa que solo hay tres productos de inercia independientes dados por.

- $I_{XY} = -mxy$
- $I_{XZ} = -mxz$
- $I_{YZ} = -myz$

También se pueden dejar expresados como:

- $I_{XY} = \int xydm$
- $I_{XZ} = \int xzdm$
- $I_{YZ} = \int yzdm$

Tensor de Inercia

El "Tensor de Inercia" de un sólido rígido calculado en el origen de un sistema cartesiano de coordenadas, es un tensor de orden dos que puede representarse por la matriz:

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} I_X & I_{XY} & I_{XZ} \\ I_{YX} & I_Y & I_{YZ} \\ I_{ZX} & I_{ZY} & I_Z \end{bmatrix} \quad \textbf{(49)}$$

También recibe el nombre de "Matriz de Inercia". Dicho tensor se forma a partir de los "Momentos de Inercia" según tres ejes perpendiculares y tres productos de inercia.

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} I_X & I_{XY} & I_{XZ} \\ I_{YX} & I_Y & I_{YZ} \\ I_{ZX} & I_{ZY} & I_Z \end{bmatrix}$$

Momento de Inercia

Para un sólido dado, el "Tensor de Inercia" es diferente en cada punto del espacio. Por lo tanto se puede definir para cada sólido un campo tensorial, a cada punto del espacio se le asigna un tensor, el "Tensor de Inercia" calculado en ese punto.

Momento Angular